

Raíces históricas de la noción de límites *Desarrollo de sus registros de representación y desarrollo cognitivo*

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica,
Università di Roma “La Sapienza”
Traducción: Gian F. Ontiveros N.

Resumen. La influencia de la visualización y/o expresión verbal y simbólica de los principales métodos infinitesimales sobre la didáctica, y en particular su importancia para la correcta caracterización de conceptos, ya es bien conocida. En este ensayo serán investigadas diferentes ideas y expresiones de los métodos infinitesimales en la historia y en la educación matemática, principalmente en referencia a la noción de límite. El desarrollo histórico de los registros de representación pueden llevar a un desarrollo paralelo de las nociones en las mentes de los estudiantes, y esto podría hacer posible el diseño de nuevas maneras de sobrepasar algunos obstáculos y desarrollar las habilidades de los estudiantes para usar y coordinar diferentes registros; sin embargo, explicar los problemas que los matemáticos en la historia se han encontrado (aquellos que han abarcado diferentes paradigmas, con diferentes estructuras de conocimiento social y creencias) no necesariamente ayuda a los estudiantes con sus dificultades. Nuestra principal contribución reside en demostrar que las ideas dinámicas y estáticas de los límites son incluidas por los diferentes registros semióticos.

Para John Fauvel, 1947-2001

Introducción

La amplia discusión de un posible paralelismo entre la historia y el crecimiento cognitivo requería el conocimiento de una teoría específica permitiendo la comparación del desarrollo intelectual de los estudiantes y el desarrollo histórico de los conceptos; además, sería necesario señalar algunos puntos que conciernen a la efectividad de tales paralelismos así como sus limitaciones, principalmente conectadas a diferentes paradigmas, con diferentes estructuras de conocimiento social y creencias. Nuestro objetivo principal no es tan elevado, precisamente: reside en mostrar eso, desde el punto de vista didáctico, las ideas dinámicas y estáticas de los límites, como han sido formulado a través de las diferentes etapas históricas, están incluidas por diferentes registros semióticos.

En este ensayo no daremos un resumen de las investigaciones educativas fieles a la noción de los límites: vamos a describir solo algunos de los elementos del marco teórico que vamos a considerar.

Al menos desde la década de los 80's varios estudios muestran que un completo entendimiento de los límites es relativamente poco frecuente (1): Schwarzenberger (1980) declara que las dificultades matemáticas conectadas al análisis clásico no puede ser simplemente explicado: concordando con él, una expresión intuitiva de las principales ideas infinitesimales implican dificultades para el estudiante. Tall enfatiza en que tales dificultades están frecuentemente conectadas al aspecto matemático del análisis, no a los aspectos cognitivos: en otras palabras, el proceso de límites es intuitivo desde un punto de vista matemático, pero no desde el cognitivo (Tal, 1985, pág. 51), así que a veces la imagen cognitiva entra en conflicto con la definición formal de límite. El límite de una función es frecuentemente considerado como un proceso dinámico (Tall y Vinner, 1981, págs. 156-168), así que es considerado en el sentido de infinitud potencial e infinitesimal.

Con respecto a los registros de representación (2), los registros verbales son de mucha importancia para la introducción a los conceptos infinitesimales, que se refieren principalmente al infinitesimal potencial; pero es importante resaltar que un registro verbal no puede existir por si solo debido a que depende de la comunidad de práctica y en los diferentes significados que los individuos le proporcionan a palabras e ideas; así que las palabras por si mismas pueden llevar a dudas e ideas erróneas. Las palabras más comunes para describir nociones infinitesimales son: tiende a, límite, aproxima a, converge; claramente estas palabras no son equivalentes en su uso diario y los estudiantes difícilmente reconocen que tales expresiones tienen el mismo significado matemático (Cornu, 1980, Davis y Vinner, 1986, pág. 298-300; Monaghan, 1991, pág. 23-24).

Los registros de representación verbal difícilmente expresan el concepto de límite en su totalidad: Los conflictos cognitivos existen en el aprendizaje de los límites, así, las representaciones verbales pueden ser consideradas como una limitación y una ayuda para la construcción de este concepto; y la presencia de una concepción errónea es posible, también conectada al uso del infinitesimal potencial. Sin embargo el uso directo de registros simbólicos (y las nociones del infinito e infinitesimales) sería demasiado exigente para la escuela secundaria: le es difícil a los estudiantes entender el concepto de límite solo a través de la definición $\varepsilon - \delta$, y por supuesto un débil entendimiento de la definición por si misma puede ser un obstáculo para la total comprensión de la noción de límite (Tsamir y Tirosh, 1992) (3).

Desde la historia a una educación matemática

A. Sfard declara que, para poder hablar de objetos matemáticos, es necesario hacer referencia al proceso de formulación de conceptos; y ella propone que una concepción operacional puede ser considerada antes que una estructural (Sfard, 1992, pág. 10). Con respecto al *savoir savant* (Una bien conocida expresión de Chevallard), el desarrollo histórico de muchas nociones puede ser considerado como una secuencia de etapas: desde una temprana, etapa intuitiva, así hasta llegar a la etapa madura; y muchos siglos podrían pasar entre estas etapas. Por supuesto es necesario teorizar aún más tales descripciones tempranas, principalmente para

sobrellevar la mera perspectiva evolutiva: tal *savoir* no puede ser considerado de manera absoluta, así concordando con una visión teleológica clásica: debe ser entendido en términos de instituciones culturales, como Chevallard ha señalado; sin embargo una primera consideración de la situación podría ser útil.

En etapas tempranas (articulado en diferentes experimentos, para ser considerado en referencia a los paradigmas disponibles en su respectivo momento), el enfoque parece ser principalmente operacional; el punto de vista estructural no es uno primario. Como podremos ver con respecto a la noción de límite, hasta que Cauchy trabaja algunas ideas implícitamente conectadas al infinito propiamente dicho no fueron considerados. Desde el punto de vista educativo, una situación similar puede ser descrita: en una etapa temprana los estudiantes se aproximan a nociones por pura intuición, sin una comprensión total del asunto; entonces su aprendizaje mejora, hasta que puede ser considerado maduro.

¿Es posible y educativamente útil considerar una analogía entre estas situaciones, en otras palabras, entre el desarrollo histórico y el crecimiento cognitivo? ¿Es posible señalar en el paso de una etapa temprana a una madura, en la mente de nuestros alumnos, algunas dudas y reacciones que podemos encontrar como lo considera el *savoir savant*?

No debemos dar respuestas generales a tales preguntas cruciales: como destacamos en la Introducción, la amplia discusión de un paralelismo entre el crecimiento cognitivo y la historia requiere una específica teoría de conocimiento (4): este no es el objetivo de nuestro trabajo. Sin embargo, debemos destacar que los procesos de enseñanza-aprendizaje toman lugar hoy en día, después de un completo desarrollo del *savoir savant*; séase la trasposición didáctica, cuyo objetivo es inicialmente un correcto desarrollo de los aspectos intuitivos, puede basarse en los resultados conseguidos en el completo desarrollo del *savoir savant*: de hecho, las reacciones de los estudiantes son a veces similares a las reacciones de los matemáticos en la historia (Tall y Vinner, 1981) y tales correspondencias pueden ser una herramienta importante para los profesores. Pero un asunto mayor está relacionado a la correcta interpretación de la historia: como se demuestra, su uso debe ser considerado una real evolución del *savoir* en términos de instituciones culturales. Así que debemos hacer referencia principalmente al uso de diferentes registros semióticos, particularmente para mejorar el entendimiento de los estudiantes de las ideas estáticas y dinámicas de los conceptos de límites.

Raíces históricas: Infinitesimal actual y potencial

Con respecto a la metodología de las encuestas históricas, vamos a sugerir algunos ejemplos que pueden ser considerados relevantes para presentar la evolución de la noción de límite, en la línea de la evolución paralela del crecimiento cognitivo, también (a pesar de la posibilidad de tal evolución paralela que no puede ser declarada sin sentido crítico); nuestro principal interés se enfoca en los diferentes registros de representación empleados: en particular, el paso de una carácter dinámico de los límites a uno estático será considerado.

Históricamente, ambas nociones de infinitesimal actual y potencial son antiguas (5): Aristóteles de Estagira (384-322 a. C.) diferenció al infinito actual del potencial, pero el infinito, según Aristóteles, es meramente potencial (Él, evitando las paradojas, refutó el infinito actual: Bostock, 1972-1973). En lo que respecta a los infinitesimales, concordando con el concepto de recta numérica, la formulación antigua es únicamente potencial, a pesar que ideas interesantes pueden estar relacionadas al método por agotamiento: en el siguiente párrafo analizaremos tal método y demostraremos que puede estar relacionado a algunas ideas del sentido del infinitesimal actual; sin embargo, como vamos a ver, las pruebas por el método por agotamiento no pueden ser considerados como límites reales (6).

La contraparte implícita entre el infinitesimal actual y potencial se volvió evidente después del nacimiento del Cálculo, así que después de los trabajos de Isaac Newton (1642-1727) y G. W. Leibniz (1646-1716): cada uno de ellos fueron responsables de su intuición primigenia, para el caso de Newton fue de manera física y en el caso de Leibniz algebraica. La importancia de las nociones de infinitesimal actual y potencial era destacable en muchas investigaciones acerca de los fundamentos del Cálculo (Bos, 1975); F. Enrique (1871-1946) destaca cualquier ambigüedad en el concepto Leibniziano de diferencial: la derivación es considerada por Leibniz como el cociente de dos *differentiae* o (como lo denominan Jo. Bernoulli y L. Euler) de dos diferenciales; sin embargo, “No está claro en los trabajos Leibnizianos si estos incrementos deben ser interpretados son de una manera potencial, como cantidades variables y evanescentes, o como infinitesimal actual” (Enriques, 1938, pág. 60: retomaremos la idea de cantidades evanescentes en el trabajo de Euler: McKinzie y Tuckey, 2001) (7). En el Siglo XX, los matemáticos reasumieron algunas de las ideas Leibnizianas: concordando con A. Robinson, Leibniz sabía por intuición que la teoría de infinitesimales conlleva a la introducción de los números ideales que pueden ser considerados infinitamente pequeños si son comparados a los números reales. Sin embargo, ni Leibniz ni sus discípulos ni sus sucesores dieron ningún desarrollo racional a esta idea (Robinson, 1974; ve interesantes sugerencias en: Todorov, 2001).

L.Euler (1707-1783) refutó la noción de infinitesimal como una cantidad menor que cualquiera dada y diferente de cero (Kline, 1972); Él era capaz de distinguir el diferencial de una función de su incremento, pero raramente seguía esta distinción. Él escribió en su *Institutiones Calculi Differentialis*:

“Cualquier cantidad puede ser reducida hasta convertirse cero completamente desaparecer. Pero una cantidad infinitamente pequeña es una cantidad efímera de ahí que la cosa por sí misma sea igual a cero. Además esto es manteniendo la definición de cosas infinitamente pequeñas en la decimos que son menores que cualquier cantidad dada; seguramente sería cero debido a que, si no es igual a cero, sería posible asignarse a sí misma una cantidad igual, y esto va en contra de la hipótesis” (Euler, 1755-1787, citado en: Kline, 1972).

La idea de cantidades evanescentes es importante: desafortunadamente Euler no vio la posibilidad de que una cantidad evanescente puede ser de un tipo diferente de cantidad de una constante numérica. Euler era consciente del problema con infinitesimales actuales (así que parece que decidió cubrirse contra las objeciones), pero cuando él en realidad hacia matemáticas, prefería una aproximación diferentes (ver el Capítulo 7 del Libro 1 de la *Introductio in Analysin Infinitorum*: “Du développement des Quantités exponentielles & ligarithmiques en Séries”: Euler, 1796, primera edición en francés, pág. 84-91; con respecto a los cálculos de Euler involucrando al infinito y cantidades infinitesimales y su interpretación basada en hiperreales: McKinzie y Tuckey, 2011).

Como previamente declaramos, nuestro resumen histórico no trata solo con conceptos: no puede olvidar sus representaciones, así que debe considerar los registros en los cuales los conceptos fueron (y son) expresados. Para hacer esto debemos volver a uno de los logros más importantes de las matemáticas griegas.

El método por agotamiento y sus registros de representación

El método por agotamiento debe ser atribuido a *Los Elementos* de Euclides: por ejemplo, la proposición 10 del Libro 12, la cual prueba que cualquier cono es un tercio del cilindro con la misma base y de la misma altura, se le atribuye al Eudoxo de Cnido (405-355 a. C.; véase: Bourbaki 1963, pág. 171; Dieudonné, 1989, pág. 63-64; el término *Agotamiento* es usado desde el Siglo XVII: Giusti, 1983, pág. 255).

Las pruebas por el método por agotamiento (8) están basadas en la siguiente proposición:

Proposición 1 del Libro 10. Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada. Y el teorema puede ser probado incluso si las partes quitadas son mitades.

En la prueba de esta proposición, Euclides aplica el llamado postulado de Eudoxo:

Definición 4 del libro 5. Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra.

Así que en *Los Elementos* este postulado es una definición: de hecho, por ejemplo, el conjunto de ángulos rectilíneos y curvilíneos no es una clase de magnitudes de Arquímedes (Proposición 16 del Libro 3). Y esta consideración de los ángulos curvilíneos es interesante: *Muestra que los griegos eran conscientes de que las cantidades pueden ser infinitesimales* (i.e. cantidades que no son números reales constantes: Tall, 1982).

Como declaramos anteriormente, hoy en día el método por agotamiento puede ser considerado interesante con referencia a los registros de representación utilizados. Primero que todo, el método por agotamiento puede ser expresado por medio de *registros verbales*, como el mismo Euclides hizo en la citada Proposición 1 del Libro 10; sin embargo debemos señalar algunos puntos fundamentales. Primero, señalaremos que el método por agotamiento opera a un nivel formal, donde “verbal” sugiere un nivel más intuitivo. Además, en lo que respecta a los registros verbales, y generalmente a todos los tipos de registro, es importante resaltar que no hay un registro único de un tipo dado: de hecho la naturaleza depende de la comunidad de práctica en cuestión y frecuentemente esta indivisiblemente enlazada a otros aspectos conceptuales. Por ejemplo, los registros verbales hacen referencia a palabras y al significado de dichas palabras, significando que a menudo se encuentran vinculadas a otros registros (E.g. registros verbales se comunican internamente y externamente con vínculos conscientes o inconscientes los sentidos espaciales, temporales, entre otros). Así que cuando hacemos referencia a los registros, debemos considerar, explícitamente o implícitamente, tales dependencias en varios marcos culturales.

También podemos expresar una prueba a través del método por agotamiento mediante registros visuales: la prueba de la Proposición 2 del Libro 12, “Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.”, esto puede ser representado visualmente por un círculo y algunos polígonos similares inscritos y circunscritos.

Notaremos además, que es posible expresar el método por agotamiento a través de *registros simbólicos* (ver por ejemplo: Carruccio, 1972, pág. 167). Sin embargo, ya sea por motivos epistemológicos o educativos, debemos subrayar que el método por agotamiento claramente puede referirse a la situación infinitesimal; pero la pregunta es la siguiente: ¿Es posible señalar un límite (en el sentido moderno) por el método por agotamiento? Varios autores no concuerdan con tales declaraciones: así que el método por agotamiento no puede ser considerado el equivalente a un límite real (Kline, 1972, pág. 99-100) (9). Y la no-equivalencia no solo es en el sentido formal: las diferencias más importantes pertenecen al reino de lo ontológico (Radford, 1997). En nuestra opinión, una comparación directa entre una prueba a través del método por agotamiento y un límite moderno sería históricamente y epistemológicamente débil, carente de significado: mientras que “la historia internalista de las matemáticas (...) tiende a interpretar el pasado en términos de conceptos modernos, más recientemente investigadores han intentado tomar una vista más holística, con las matemáticas vistas como un componente de la cultura contemporánea; la tarea del historiador es describir influencias, condiciones y motivaciones (...) bajo las cuales los problemas surgen” (Grugnetti y Rogers, 2000, pág. 40). Concordamos completamente.

El límite según Wallis, Cauchy, y Weierstrass

Las raíces históricas de la noción del límite no son tan antiguas como las raíces de los métodos infinitesimales (Ruffini, 1926). J. Wallis (1616-1703), en su *“Arithmetica infinitorum”* (1655), introdujo un concepto aritmético de límite de una función, i.e. el número cuya diferencia de la función puede ser menor que cualquier cantidad dada. M. Kline resalta que “su formulación sigue todavía es vaga, pero hay una idea acertada” (Kline, 1972; con respecto a esta formulación vaga de Wallis, debemos repetir la importante pregunta de corrección al final de este párrafo). Otro matemático, en el Siglo XVII, trabajó el concepto de límite: de acuerdo con G. Loria, en *Elementum tertium de Geometriae speciosae elementa* (1659) por P. Mengoli (1635-1686), “Este matemático demostró poseer una clara idea del concepto de límite” (Loria, 1929-1933, pág. 526). Algunas notas interesantes se encuentran en *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667) por J. Gregory (1638-1675) y en la obra maestra de Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687; además: Castelnouvo, 1938; Boyer, 1969; Menghini, 1982; Edwards, 1994).

Debemos resaltar que estas nociones de límite fueron relacionadas principalmente a las secuencias y series: F. Viète (1540-1603), en su *Varia responsa* (1593), calculó la suma de una serie geométrica; P. de Fermat (1601-1665), también sabía este resultado; en 1655 A. Tacquet (1612-1660) y J. Wallis lo publicó en *Arithmeticae theoria et praxis accurate demonstrata* y en *Arithmetica infinitorum*. En particular, Tacquet enfatizó en que el paso de una “progresión finita” a una serie infinita es inmediata (Loria, 1929-1933, pág. 517). Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) en su *Opus geometricum* (1647) se refirió a la paradoja de Aquiles y la tortuga como una serie geométrica y escribió:

“La conclusión de una progresión es el fin de una serie que la considerada progresión no alcanza, a pesar de que está extendida indefinidamente; puede aproximarse a ese valor lo más que sea posible” (citado en: Kline, 1972).

Consideraremos una referencia educativa interesante: los comentarios de Grégoire ilustran una gran equivocación en límites. Él hace referencia a una secuencia cuyos términos son siempre diferentes del límite (acerca de los límites de secuencias y sumas de series, ver: Boyer, 1969 and 1982); Tall y Vinner resaltan que los estudiantes frecuentemente piensan que $s_n \rightarrow l$ significa que los valores de la secuencia s_n solo aproxima al límite de l , pero nunca lo alcanza (un buen ejemplo popular es sí 0.999... es igual o menor que 1; lo podemos encontrar en: Bagni, 1998); en esta situación, el límite de una función es claramente considerado como un proceso dinámico (Tall y Vinner, 1981, pág. 156-168), así que es considerado en el sentido de infinidad potencial e infinitesimal. (10)

G. Vitali (1875-1932) se dio cuenta que “por supuesto que la convergencia no puede ser considerada antes que la noción de límite” (Vitali, 1979, pág. 404) y el límite no está correctamente considerado como un concepto analítico fundamental (en particular, en el Siglo XVII y en el Siglo XVIII, el asunto de la existencia del

límite de la secuencia de sumas parciales no era considerado): sin embargo podemos declarar que el proceso de límites se encuentra antes del concepto de límites.

De acuerdo a la visión tradicional, A. L. Cauchy (1789-1857) fue el primer matemático en hacer estudios rigurosos del Cálculo (11). En nuestra opinión la exactitud debe ser investigada en su propio contexto conceptual y no contra los estándares contemporáneos, para evitar la imposición de marcos conceptuales moderno para los trabajos basados en otros (Así que Euclides y Wallis *eran rigurosos de su propia manera*). Sin embargo el *Cours d'Analyse algébrique* de Cauchy (París, 1821), un libro particularmente diseñado por los estudiantes del École Polytechnique, debe ser considerado un tratado fundamental desde el punto de vista formal, y desarrollo muchos teoremas analíticos básicos tan rigurosos cómo se es posible.

Recordemos la definición de límite e infinitesimal según Cauchy (desde *Cours d'analyse*, pág. 4: Cauchy, 1884-1897):

“Cuando los valores de una variable aproximan indefinidamente un valor definido, tan cerca como queramos, este es el límite de todos aquellos valores. De hecho, un número irracional es el límite de las diferentes fracciones que le proporcionaron valores aproximados (...). Cuando los valores de una variable son (...) menores que cualquier número dado, esta variable es un *infinitesimal* o una *magnitud infinitesimal*. El límite de tal variable es cero” (citado en: Bottazzini, Freguglia y Toti Rigatelli, 1992, pág. 327-328; con lo que respecta a los textos originales, ver: Smith, 1959).

Así que Cauchy introdujo la distinción fundamental entre *cantidades constantes* y *cantidades variables*, aunque no tenía una descripción formal de los números reales como campos ordenados satisfaciendo una lista de axiomas.

¿Sería posible expresar la definición verbal de Cauchy a través de registros simbólicos? No podríamos dar una respuesta: “Las matemáticas no son solo texto; vive en la mente de las personas y puede, hasta cierto punto, ser divulgado mediante la interpretación de los artefactos que han producido” y “Estos artefactos, inscripciones, instrumentos, libros, y dispositivos técnicos, han sido desarrollados en lugares particulares por razones particulares” (Grugnetti y Rogers, 2000, pág. 46). La formulación de Cauchy fue expresada bajo los paradigmas disponibles en aquel entonces, y su formulación puede llevar al uso de diferentes registros: Tall resalta que “hay varias maneras de visualizar los infinitesimales como los puntos de una línea”, lo cual permite que “el inexperto vea a los infinitesimales como *puntos variables* que son *arbitrariamente más pequeños* que cualquier constante real positiva c . Esto es análogo a la noción prevalente a principios del Siglo XIX cuando Cauchy describió a los infinitesimales como *cantidades variables que tienden a cero*” (Tall, 2001, pág. 225).

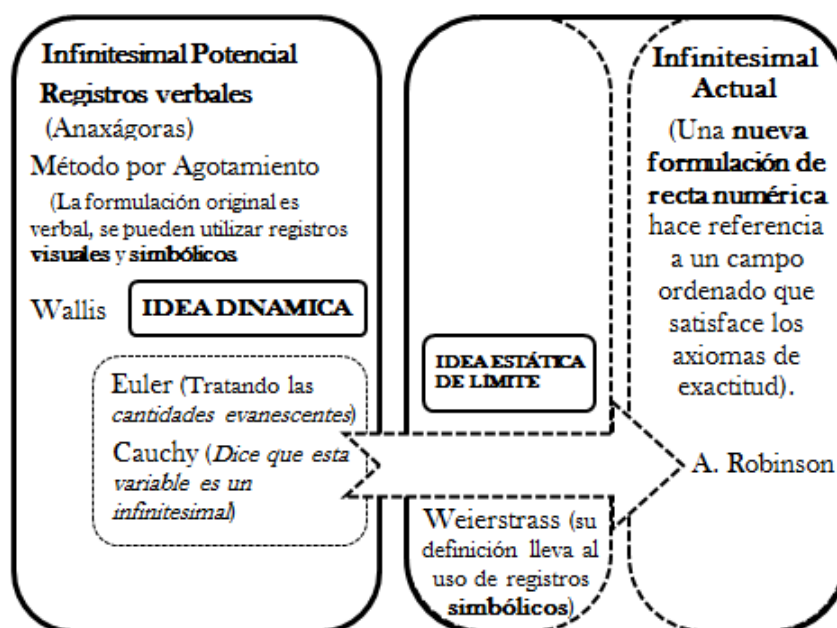
Así que la noción moderna de límite, señalada desde el Siglo XVII por Wallis, Mengoli y finalmente, por Cauchy, es principalmente expresada por medio de representaciones verbales (a pesar de que es importante recordar que tales registros verbales no pueden ser aislados, de hecho, desde la percepción sensorial de *cosas arbitrariamente pequeñas*).

K. T. W. Weierstrass (1815-1897) dio una definición moderna de límite y de función continua: de hecho el declaró que la función $x \rightarrow f(x)$ es continua en $x = c$ sí, para cualquier número real $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un número real $\delta > 0$ tales que para x tal que $|x - c| < \delta$ si tenemos que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Citaremos a M. Kline, quien se dio cuenta que el trabajo de Weierstrass mejoró trabajos previos de Bolzano, Abel y Cauchy. Weierstrass intentó evitar la intuición (...) y no le gustaba la frase de *una variable aproxima un límite* debido a que sugiere ideas de tiempo y movimiento” (Kline, 1972).

Con respecto a los registros de representación, debemos destacar la formulación de Weierstrass y la definición de límite realmente permite una representación simbólica moderna: para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que para cada x tal que $|x - c| < \delta$ siendo $x \neq c$ tenemos que $|f(x) - l| < \varepsilon$ “se puede considerar el equivalente a la definición de Weierstrass de límite l (y puede ser expresado utilizando cuantificadores, por símbolos como $\forall, \exists$, etc.): así, concluimos con que la definición de Weierstrass (la tal llamada ‘definición $\varepsilon - \delta$ ’) finalmente lleva al uso de registros de representación simbólicos. Sin embargo, permítanos resaltar una vez más que puede ser confuso hacer referencia a un solo registro de representación simbólica: hay diferentes registros simbólicos en diferentes comunidades de práctica. Leibniz, Newton, Cauchy, Robinson tuvieron sus propios registros simbólicos que se diferencian los unos de los otros y uno de aquellos que se diferenciaban también era obviamente el de Weierstrass”

Desde el punto de vista educativo, la principal dificultad para los estudiantes es tratar con la definición $\varepsilon - \delta$ que es el carácter estático de la teoría formal contra el carácter dinámico de su aproximación cognitiva: la consideración histórica del desarrollo del concepto de límite, principalmente con referencia al uso de diferentes registros semióticos, puede ser útil para hacer posible la correcta formulación de las ideas estáticas y dinámicas de límite.

De esta manera resumiremos a continuación en forma de gráfico algunos puntos tratados previamente.



Reflexiones finales

En nuestra opinión, el uso de registros de representación como herramientas para analizar tanto el aspecto histórico como el educativo de la noción de límite puede ser un camino interesante a seguir, a pesar de que la cuestión a ser considerada es tal que no es completamente clara de cómo los procesos filogenéticos están relacionados a los ontogenéticos. Además, desde el punto de vista educativo, verificaciones experimentales serían necesarias: muchos aspectos influyen el aprendizaje de conceptos infinitesimales, E.g. algunas cláusulas de los contratos didácticos: tales influencias pueden ser indicadas por pruebas y entrevistas; por supuesto, con respecto a los aspectos experimentales, parecería ser necesario identificar criterios de muestra y, por ejemplo, intuiciones pre-curso (y considerar el contrato experimental). En este trabajo no proponemos verificaciones experimentales: así que no damos resultados generales y conclusiones, pero sugerimos algunas reflexiones finales.

“La noción de límite ocurre en numerosas maneras distintas. (...) Todo esto tiene en común un *proceso* de aproximación arbitrario a un valor determinado (el límite). En cada caso, el mismo simbolismo se utiliza para los procesos de convergencia y también para el *concepto de límite*” (Tall, 2001, pág. 232; Tall y Al., 2001): el desarrollo histórico nos permite considerar diferentes aproximaciones, relacionadas con el infinitesimal potencial y el actual, y con diferentes registros de representación; sin embargo, desde el punto de vista educativo es realmente difícil introducir la noción de límite sin hacer referencia al *precepto* de límite (Gray y Tall, 1994).

En nuestra opinión, el problema del paso de discreto a continuo es principalmente uno cultural, los asuntos históricos son importantes para aproximarse a él y sobrellevar muchas dificultades (Radford, 1997; Furinghetti y Radford, 2002) (12). Más investigaciones pueden ser realizadas para clarificar qué categoría de personas deberían estar actuando bajo el argumento considerado y en qué manera: los puntos acerca del conocimiento y de los posibles paralelismos entre el uso de

registros y el desarrollo histórico están dirigidos hacia los estudiantes, profesores, educadores matemáticos, investigadores en educación matemática. Seguramente varias preguntas quedan abiertas: hay un *posible* paralelismo entre el desarrollo histórico de las ideas acerca de los infinitesimales y el desarrollo en el entendimiento de los estudiantes; ¿Qué le sigue? Por ejemplo, ¿El estudiante se verá beneficiado por saber más de la historia? ¿Y qué hay de la importancia de leer las fuentes fundamentales? y ¿Cuál es el rol del profesor? ¿Son los educadores de matemáticas responsables de entrenar a los profesores que deberían estar conscientes de estos paralelismos y como esto ayuda en el entrenamiento de profesores? (13)

Proponemos una reflexión final: usar ejemplos de la historia de las matemáticas puede ser efectivo para introducir algunos tópicos fundamentales, E.g. las ideas estáticas y dinámicas de límite con referencia a los registros semióticos utilizados; esto permite interesantes análisis a priori de las dificultades de los estudiantes y hace posible diseñar nuevas maneras de sobrellevar obstáculos clásicos. Sin embargo explicando los sutiles problemas encontrados por savants en la historia no necesariamente ayuda a los estudiantes con sus dificultades, dado que los matemáticos en la historia habitaban en diferentes paradigmas con diferentes estructuras de conocimiento social y creencias. Así que utilizando ejemplos de la historia debe ser controlado para obtener un conocimiento completo, por ejemplo, evaluando detalles empíricos en el trabajo con estudiantes.

Los agradecimientos más cálidos de parte del autor a David Tall, quien amablemente ofreció cualquier ayuda posible.

El autor desea agradecer a tres referencias de la revista, quienes dieron sugerencias muy importantes.

Notas

- (1) Varios trabajo se centraron a la didáctica del límite: A. Sierpinska declara que los obstáculos pueden ser clasificados en cinco grupos (Sierpinska, 1985): en el primero, llamado *Horror infiniti*, encontramos el rechazo hacia la declaración del límite como una operación matemática y la consideración de una aproximación exacta, a la lógica y a la simbología (Sierpinska basó su trabajo en la formulación topológica de límite, mientras que, de otro modo, la investigación de B. Cornu se basa en una numérica: Cornu, 1991; Artique, 1998). Muchas referencias pueden ser citadas: Tall y Vinner, 1981; Cornu, 1980, 1981; Orton, 1983; Davis y Vinner, 1986; Sierpinska, 1987; Mamona, 1987; Monaghan, 1991; Tall, 1990a, 1990b, 1994; con respecto a los resúmenes: Mamona-Downs, 1990, Gagatsis y Dimarakis, 1996.
- (2) Con respecto a la definición de registros de representación, ver: Duval, 1995. Ver además: Kaput, 1991; sugerencias estimulantes pueden ser encontradas en: Thurston, 1994.
- (3) No podemos considerar la didáctica del Cálculo solo con referencia a la noción de límite: por ejemplo, con respecto el concepto de derivada, recordamos el rol primario jugado por sus raíces cognitivas. Muchas investigaciones (Trousche, 1996, basado en: Rabardel, 1995; Arigue y Al.,

1997) resaltan que el uso de medios tecnológicos inducen comportamientos basados en la comparación de diferentes puntos de vista, así que se requiere una gran habilidad para coordinar diferentes registros semióticos (Confrey, 1992, Dubinsky, 1995, Nemirovsky y Noble, 1997; Yerushalmy, 1997; ver resúmenes en: Tall, 1996; Artigue, 1998).

- (4) Parece confirmar una famosa declaración de Piaget y García, de acuerdo con la cual el desarrollo histórico e individual están enlazado (ver: Piaget y García, 1983; por supuesto, por eso, no apoyamos esta idea en todos los niveles académicos). Tales consideraciones son apoyadas por algunos trabajos clásicos por Chevallard (1985) y Sfard (1991; con respecto al trabajo de Sfard, vamos a resaltar que ella aborda el problema utilizando la epistemología de Piaget); sin embargo, no nos concentraremos en la discusión acerca de los problemas eventuales de coordinar resultados de diferentes marcos teóricos.
- (5) Anaxágoras de Clazomenae (500?-428 a. C.) escribió: “Para ninguno hay al menos lo que es pequeño, pero siempre hay algo menos. Porque el ser no es el no ser” (citado en Geymonat, 1970, I). Si consideramos el subyacente concepto de límite (pero independiente de él) está el concepto de sistema numérico como un continuo y un campo ordenado de Arquímedes, Anaxágoras parece abarcar el sistema numérico más que el límite directamente; y sería necesario considerar la diferencia entre magnitud y número en las contribuciones griegas, principalmente con referencia a las diferentes maneras en las que los objetos geométricos se pueden percibir (ver las dos definiciones de proporción en Euclides: Def. 7 del Libro 5 y Def. 21 del Libro 7). El concepto de recta numérica es diferente al desarrollado por los griegos, Cauchy o Robinson; la percepción de teorías modernas yace en la posibilidad de considerar sistemas que tienen diferentes tipos de cantidades (por ejemplo, Cauchy realizó una distinción entre cantidades constantes y variables: según su propia opinión, los infinitesimales son cantidades pero no constantes; sin embargo tal distinción entre cantidades constantes y variables no puede ser considerada hasta la introducción de argumentos modernos: Tall, 1982).
- (6) Resulta probarse por *reductio ad absurdum*, sabiéndose que los griegos no aceptan pruebas por intuición o por técnicas heurísticas como pruebas completas.
- (7) Leibniz escribió (1695): “Cuando hablamos de cantidades (...) indefinidamente pequeñas (las menores que conozcamos) nos referimos a que queremos decir cantidades (...) tan pequeñas como queramos, así que si cometemos un error este será menor que cualquier cantidad dada” (citado en: Kline, 1972). Algunas notas escritas por Leibniz a Wallis en 1690 son interesantes: “Es útil considerar cantidades infinitamente pequeñas tales que, cuando busquemos su cociente, no puedan ser consideradas iguales a cero, pero que se rehúsan a aparecer juntos en cantidades más grandes. Así que, si tenemos $x + dx$, dx se rechaza. Pero la situación es diferente si vemos la diferencia entre $x + dx$ y x . De la misma manera, no podemos considerar $x dx$ y $dx dx$ juntos. Así que debemos diferenciar xy , escribiremos $(x + dx)(y + dy) - xy = x dy + y dx + dx dy$. Así que, en cualquier situación

particular, el fallo es menor que cualquier cantidad finita” (Leibniz, 1849-1863, IV, pág. 63). Los métodos infinitesimales tenían, en el Siglo XVIII, algunos oponentes activos, como G. Berkeley (1685-1753), quien escribió el panfleto *El analista, o un discurso dirigido a un infiel matemático*. Él declaró: “confieso que la noción de cantidad indefinidamente pequeña que cualquier cantidad imaginable se escapa de mis capacidades. Pero la noción de una parte de esta cantidad infinitesimal tal que es indefinidamente más pequeño que si mismo, esto es una infinita dificultad para cualquier hombre” (Arrigo y D’Amore, 1992, pág. 123). El mismísimo M. Rolle (1652-1719) expresó dudas sobre el asentamiento de las nociones infinitesimales: él no estaba seguro acerca de la exactitud del Cálculo Leibniziano, que “él consideró un truco exitoso” (Bottazzini, 1990, pág. 27). J. B. d’Alembert (1717-1783) declaró: “Una cantidad o es algo o es nada: si es algo, no se ha convertido en cero; si es nada, se convirtió en cero. La suposición de que hay un estado intermedio entre algo y nada es una locura” (*Mélanges de littérature, d’histoire et de philosophie*, pág. 249, citado en: Boyer, 1982).

- (8) El método por agotamiento es utilizado en muchas proposiciones en el Libro 12 de *Elementos*: los resultados principales son las Prop. 2, 5, 10, 18.
- (9) Por ejemplo, G. Saccheri (1667-1733) en su *Euclides ab omni naevo vindicatus*, escribió acerca de la Prop. 2: “Euclides previamente probó (Prop. 1) que polígonos similares inscritos en círculos son el uno al otro como cuadrados en sus diámetros; entonces él dedujo la Prop. 2 considerando los círculos como polígonos con indefinida cantidad de lados” (Saccheri, 1904, pág. 104). Pero Euclides (y Eudoxo también) *nunca* utilizó infinito como lo plantea esta idea (Euclides, 1970, pág. 931).
- (10) La pregunta de si una secuencia puede alcanzar su límite o no, puede ser considerada una filosófica: algunas secuencias (E.g. secuencias constantes) realmente alcanzan ese límite; la principal pregunta es si las secuencias prototípicas se aproximan a alcanzar su límite *en el infinito* de alguna manera: de hecho, este proceso potencial quizás nunca alcance su límite; y una vez más esto trae un conflicto cognitivo, donde las imágenes cognitivas chocan con la definición matemática formal. Además, es importante resaltar que cada registro de representación en realidad tiene una medida diferente de aproximación (ver: *Cálculo Gráfico* de D. Tall: Tall, 1986; con respecto a sus inconsistencias: Tall, 1990b).
- (11) Citaremos algunas palabras del joven N. H. Abel (1802-1829): “Cauchy es un idiota”, pero es el único hombre “que sabe hacer matemáticas” y “quien hoy en día trata con matemáticas puras” (Bottazzini, 1990, pág. 86).
- (12) Con respecto a algunas rutas de investigación, recordamos que Lakoff y Nuñez (2000) argumentan que la metáfora conceptual juega un rol central en las ideas de infinito e infinitesimal (ver por ejemplo la *Metáfora Básica del Infinito*; Por supuesto su trabajo trato con muchos otros conceptos matemáticos también). El trabajo fundamental por Lakoff y Nuñez se centra principalmente en aspectos cognitivos: la materialización es uno de los asuntos más importantes de la investigación en la educación matemática y es importante investigar varias conexiones sutiles entre las percepciones y símbolos; sin embargo desde un estricto punto de vista epistemológico, el punto crucial es el paso de discreto a

continuo; y el razonamiento metafórico, es muy importante que sea desde el punto de vista educativo, debe ser regulado por el profesor para evitar mal información (recordemos, por ejemplo, las dificultades con series no convergentes; casos de sobre generalización se discuten en: Bagni, 2000).

- (13) Con respecto a los profesores, una habilidad epistemológica relevante es necesaria, sugerencias pueden ser encontradas en: Weil, 1980; Swetz, 1982, 1989, 1992, 1995; Katz, 1986; Fauvel, 1990; Anglin, 1992, Marchisotto, 1993, Nobre, 1994, Jahnke, 1995, Siu, 1995, Calinger, 1996, Furinghetti y Somaglia, 1997.

Referencias

- Anglin, W.S. (1992), Mathematics and History, *Mathematical Intelligencer*, 14, 4, 6-12.
- Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.
- Artigue, M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18.2, 231-262.
- Artigue, M.; Defouad, B.; Dupérier, M.; Juge, G. & Lagrange, J.B. (1997), L'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée, *Rapport de recherche*, Equipe DIDIREM, IREM Paris 7.
- Bagni, G.T. (1998), Dimostrare e convincere, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 36, 53-60.
- Bagni, G.T. (2000), «Simple» rules and general rules in some High School students' mistakes, *Journal fur Mathematik Didaktik*, 21, 2, 124-138.
- Bos, H.J.M. (1975), Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1-90.
- Bostock, D. (1972-1973), Aristotle, Zeno and the potential infinite, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 73.
- Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.
- Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
- Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris 1960; *Elements of the History of Mathematics*, Springer, Berlin 1997; 2nd edition: 1998).
- Boyer, C. (1969), *The History of the Calculus*: Hallerberg et. Al. (1969), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington.
- Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).
- Calinger, R. (Ed.) (1996), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching*, Mathematical Association of America.
- Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
- Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (reprint: Feltrinelli, Milano 1962).

- Cauchy A.L. (1884-1897), *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Confrey, J. (1992), *Function Probe*, Santa Barbara CA, Intellimation Library for Macintosh.
- Cornu, B. (1980), Interference des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite, *Cahier du séminaire de didactique des Mathématiques et Informatique*, 8, 57-83.
- Cornu, B. (1981), Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite, *Cahier du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 26, 305-326.
- Cornu, B. (1991), Limits, D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166, Kluwer, Dordrecht.
- Davis R. & Vinner S. (1986), The notion of Limit: some seemingly unavoidable misconception stages, *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303. 13
- Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (Pour l'honneur de l'esprit humain, Hachette, Paris 1987).
- Dittrich, A.B. (1973), An experiment in teaching the History of Mathematics, *Mathematics Teacher*, 66, 35-38.
- Dubinsky, E. (1995), ISETL: A programming language for learning mathematics, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 48, 1-25.
- Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Paris.
- Edwards, C.H. Jr. (1994), *The Historical Development of the Calculus*, Springer, Berlin.
- Enriques, F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (reprint: 1982).
- Euclid (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni L. (Eds.), UTET, Torino.
- Euler, L. (1755-1787), *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysis Finitorum ac Doctrina Serierum*, I-II, Galeati, Pavia.
- Euler, L. (1796), *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, I-II, Barrois, Paris (I ed. in French).
- Fauvel, J. (1990), History in the mathematical classroom, *The IREM papers*, The Mathematical Association.
- Furinghetti, F. & Radford, L. (2002), Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Lawrence Erlbaum, New Jersey.
- Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), *Storia della matematica in classe, L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.
- Gagatsis, A. & Dimarakis, I. (1996), The limit concept; difficulties-obstacles of students' understanding, Gagatsis, A. & Rogers, L., *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus, Thessaloniki.
- Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
- Giusti, E. (1983) *Analisi matematica*, I, Boringhieri, Torino.

- Gray, E.M. & Tall, D.O. (1994), Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal of Research in Mathematics Education*, 25, 2, 115-141.
- Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000), Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, 39-62, Dordrecht, Kluwer.
- Jahnke, H.N. (1995), Historische Reflexion im Unterricht, *Mathem. Didactica* 18, 2, 30-58.
- Kaput, J.J. (1991), Notations and representations as mediators of constructive processes.
- Constructivism and mathematics education, von Glaserfeld, E. (Ed.), 53-74, Kluwer, Dordrecht.
- Katz, V.J. (1986), Using History in teaching Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 6, 13-19.
- Kline, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York.
- Lakoff, G. & Nuñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
- Leibniz, G.W. (1849-1863), *Mathematische Schriften*, I-VII., Gerhardt, C.I. (Ed.), AscherSchmidt, Berlin-Halle.
- Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (reprint: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).
- Mamona, J. (1987), *Students Interpretations of Some Concepts of Mathematical Analysis*, Unpublished Ph.D. thesis, University of Southampton. 14
- Mamona-Downs, J. (1990), *Calculus-Analysis: A review of recent educational research: Proceedings of Secundo Simposio Internacional Investigacion en Educacion Matematica*, 11-36, Cuernavaca, Mexico 1990.
- Marchisotto, E.A. (1993), Teaching Mathematics humanistically: A new look at an old friend, *MAA Notes*, 32, 183-190.
- McKinzie & Tuckey (2001), High trigonometry, hyperreal numbers and Euler's Analysis of Infinities, *Mathematics Magazine*, 74, 5, 339-368.
- Menghini, M. (1982), Cavalieri e Leibniz: dagli indivisibili al differenziale, Montaldo, O. & Grugnetti, L. (Eds.), *La storia delle matematiche in Italia*, Università Cagliari, 385-394.
- Monaghan, J. (1991), Problems with the language of Limits: *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.
- Nemirovsky, R. & Noble, T. (1997), On mathematical Visualization and the Place Where We Live, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 99-131.
- Nobre, S. (Ed.) (1994), *Meeting of the International Study Group on relations between History and pedagogy of Mathematics*, Blumenau, Brasil, UNESP.
- Orton, A. (1983), Students' Understanding of Differentiation, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
- Piaget, J. & Garcia, R. (1983), *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris.
- Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*, A. Colin, Paris.

- Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Robinson, A. (1974), *Non-standard analysis*, North-Holland, London.
- Ruffini, E. (1926), Il «Metodo» di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità, Zanichelli, Bologna (reprint: Feltrinelli, Milano 1961).
- Saccheri, G. (1904), *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Boccardini (Ed.), Hoepli, Milano.
- Schwarzenberger, R. (1980), Why Calculus cannot be made easy?, *Mathematical Gazette*, 64, 158-166.
- Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflection on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sierpinska, A. (1985), Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 1, 5-68.
- Sierpinska, A. (1987), Humanities Students and Epistemological Obstacles related to limits, *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.
- Siu, M.K. (1995), Mathematical thinking and History of Mathematics, Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B. & Katz, V. (Eds.), *Learn From the Masters*, MAA, 279-282.
- Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, (1st edition: McGraw-Hill, 1929).
- Swetz, F.J. (1982), The use of projects in teaching the History of Mathematics, *Historia Math.*, 9, 201-205.
- Swetz, F.J. (1989), Using problems from the History of Mathematics in classroom instruction, *Math. Teacher*, 82, 370-377.
- Swetz, F.J. (1992), Some not so random thoughts about the History of Mathematics, its teaching, learning and textbooks, *Primus*, 5, 2, 97-107.
- Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69.
- Tall, D. (1982), Elementary Axioms and Pictures for Infinitesimal Calculus, *Bulletin of the IMA*, 14, 43-48. 15
- Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: Mathematical Teaching, 110, 49-53.
- Tall, D. (1986), *Graphic Calculus, I, II, III* (BBC compatible software), Glentop Press, London.
- Tall, D. (1990a), A versatile approach to Calculus and numerical methods, *Teaching Math. And its Applications*, 9, 3, 124-130.
- Tall, D. (1990b), Inconsistencies in the learning of calculus and analysis, *Focus on Learning Problems in Math.*, 12, 49-64.
- Tall, D. (1994), A versatile theory of visualization and symbolization in Mathematics: CIEAEM Conference Toulouse.
- Tall, D. (1996), Function and Calculus, A.J. Bishop & Al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer, Dordrecht.

- Tall, D.; McGowen, M. & DeMarois, P. (2000), The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept, PME-NA Proceedings, 1, 247-254.
- Tall, D. (2001), Natural and Formal Infinities, Educational Studies in Mathematics, 48 (2&3), 199-238.
- Tall, D.; Gray, E.; Bin Ali, M.; Crowley, L.; DeMarois, P.; McGowen, M.; Pitta, D.; Pinto, M.; Thomas, M. & Yusof, Y. (2001), Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1, 81-104.
- Thurston, W. P. (1994), On Proof and Progress in Mathematics, Bulletin of American Mathematical Society, 30, 2, 161-177.
- Todorov, T.D. (2001), Back to classics: teaching limits through infinitesimals, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 1, 1-20.
- Trouche, L. (1996), Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2.
- Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity, PME-16, 90-97.
- Vitali, G. (1979), Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti, Berzolari, L.; Vivanti, G. & Gigli, D. (Eds.), Enciclopedia delle matematiche elementari, I-2, Hoepli, Milano.
- Weil, A. (1980), History of Mathematics: why and how: Letho, O. (Ed.), Proceedings of International Congress of Mathematicians, Helsinki 1978, I, 227-236.
- Yerushalmy, M. (1997), Reaching the unreachable: technology and semantics of asymptotes, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2, 1-25.

Texto en su idioma original [Ingles]